Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Διαφορική Γεωμετρία
Ιούνιος, 2016

1. Έστω η καμπύλη $\mathfrak{c}(s) = (x(s), 0, z(s))$, x(s) > 0 , με παράμετρο το μήκος τόξου s, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oz και προκύπτει η επιφάνεια εκ περιστροφής

$$\mathbf{x}(s,\theta) = (x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s))$$

   (α΄) Δείξτε ότι η επιφάνεια είναι κανονική.

   (β΄) Δείξτε ότι $\mathbf{k}(p) = -\dfrac{\ddot{x}(s)}{x(s)}$.

   (γ΄) Τι πρέπει να είναι η c(s) ώστε $\mathbf{k}(p) = 0$;

2. Δίνεται η επιφάνεια $\mathbb{S}$ με εξίσωση $x = y^2 + \log \mathrm{z}$.

   (α΄) Δείξτε ότι είναι κανονική.

   (β΄) Εξετάστε αν είναι ευθειογενής , αναπτυκτή.

   (γ΄) Εξετάστε αν αποτελεί δίκτυο ασυμπτωτικών γραμμών.

3. (α΄) Έστω $t \in \mathbb{R}$ και έστω $\mathfrak{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\mathfrak{c}(t) = \left(1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}\cos t\right)$$

   Να εξετάσετε τι παριστάνει.

   (β΄) Έστω $\mathfrak{c}(s) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και $K(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Έστω ότι ισχύει:

$$\ddot{\overrightarrow{b}}(s) = \lambda\overrightarrow{t}(s) + \mu(s)\overrightarrow{b}(s)$$

   όπου $\mu(s)$ λεία και λ σταθερός πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι η $\mathfrak{c}(s)$ είναι γεωμετρικά ισότιμη με κυλινδρική έλικα.

4. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

   (α΄) III_p(w) - $2\mathrm{H}$(p)$\mathrm{II}_p + K(p)\mathrm{I}_p(w) = 0$

   (β΄) Αν $\mathrm{III}_p(w) = f\mathrm{I}_p(w)$ και $k_1(p) \neq$ -$k_2(p)$ τότε να δείξετε ότι η επιφάνεια είναι τμήμα σφαίρας.

   (γ΄) (i) $\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = K(p)\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$.

   (ii) $\mathbf{X}_v \times \mathbf{N}_u + \mathbf{N}_v \times \mathbf{X}_u = 2\mathrm{H}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!